ÜBER MULTIPLIKATORENSYSTEME UND POINCARÉSCHE REIHEN ZUR GRUPPE DER GANZEN MODULSUBSTITUTIONEN ZWEITEN GRADES

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Horst Kuschnerow
aus Soltau

Göttingen 1976

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534923_0020

ÜBER MULTIPLIKATORENSYSTEME UND POINCARÉSCHE REIHEN ZUR GRUPPE DER GANZEN MODULSUBSTITUTIONEN ZWEITEN GRADES

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Horst Kuschnerow
aus Soltau

Göttingen 1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7
Referent : Prof.Dr.U.Christian
Korreferent: Prof.Dr.H-W.Burmann
Tag der mündlichen Prüfung: 4.November 1976

Sei M eine reelle n x n - Matrix . Mit M' , Sp M und Det M seien die Transponierte , Spur und Determi = nante von M bezeichnet . Für die Einheitsmatrix wird das Symbol $\tilde{E}$ benutzt ; n sei die n -reihige Nullspalte . Falls

$$M[x] = x'M\,x > 0$$

für jede reelle Spalte $x \neq n$ gilt , nennen wir M positiv ; falls

$$M[x] \geq 0$$

für jede reelle Spalte x gilt , nennen wir M semi-positiv . Die Matrix M heiße ganz , wenn alle ihre Elemente ganze rationale Zahlen sind . Sind M und M^{-1} ganz , so heißt M unimodular ; diese Matrizen werden oft mit $\tilde{U}$ bezeichnet . Eine symmetrische Matrix S heißt halbganz , wenn die Matrixkoeffizienten $s_{kk}(k = 1,\ldots,n)$ und $2s_{kl}(1 \leq k < l \leq n)$ sämtlich ganze Zahlen sind . Ferner bezeichnet $\langle M_1 , M_2 , \ldots , M_n \rangle$ die von $M_1 , M_2 , \ldots , M_n$ er = zeugte Gruppe .

Die $k = \frac{n(n+1)}{2}$ - dimensionale verallgemeinerte obere Halbebene $\mathfrak{H}$ besteht aus allen n - reihigen komplexen symmetrischen Matrizen $Z = X + iY$ mit positivem Imaginär = teil Y . Sie wird durch die Substitution

$$(1)\quad Z^* = Z[\tilde{U}] + S = \tilde{U}'Z\tilde{U} + S$$

eindeutig und analytisch auf sich abgebildet , wobei $\tilde{U}$ unimodular und S ganz und symmetrisch sind . Die Ge =

samtheit dieser Abbildungen ist die Gruppe der ganzen Modulsubstitutionen Δ . Auf $\mathfrak{Z}$ nicht - verschwindende holomorphe Funktionen heißen Einheiten . Falls für eine auf $\mathfrak{Z}$ nicht identisch verschwindende Funktion $F(Z)$ für alle Elemente aus Δ gilt :

(2) $F(Z[\tilde{U}] + S) = I(\tilde{U},S;Z)\, F(Z)$,

wobei die Symbole $I(\tilde{U},S;Z)$ Einheiten bezeichnen , so heißt $F(Z)$ eine Form zur Gruppe Δ und die Gesamt = heit dieser Einheiten das zu $F(Z)$ gehörende Multipli = katorensystem .

Diese Systeme sind in [1] für den Fall $n \geq 3$ und in [2] für den Fall $n = 2$ in geeigneter Weise klassifiziert worden.In dieser Arbeit soll für den in [2] behandelten Fall $n = 2$ untersucht werden , ob man zu gewissen Multi = plikatorensystemen mit Hilfe der zugehörigen Poincaréschen Reihen

$$F(n,I;Z) = \sum_{\Omega/\Omega_1} I^{-n}(N;Z)$$

eine zum Multiplikatorensystem $I(U;Z)$ gehörende Form finden kann , welche die Bedingungen (2) erfüllt . Es wird sich herausstellen , daß das in keinem der unter = suchten Fälle möglich ist .

I. UNIMODULARE MATRIZEN

Die Gruppe der unimodularen 2 x 2 - Matrizen werde mit $\tilde{\Omega}$ bezeichnet . Die folgenden Matrizen gehören dieser Gruppe an :

(3) $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\tilde{R} = -\tilde{B}\,\tilde{A}_2\tilde{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\tilde{A} = -\tilde{C}\,\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Man liest aus (5) sofort ab , daß

(6) $\tilde{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (n \in Z)$

gilt .

Aus [3] folgt , daß die folgenden Relationen $\tilde{\Omega}$ definieren

(7) $(\tilde{R}\,\tilde{A})^2 = (\tilde{R}^3\tilde{A}^2)^2 = (\tilde{R}^2\tilde{A}^2)^6 = \tilde{E}$.

Insbesondere wird $\tilde{\Omega}$ durch die Elemente $\tilde{R}$ und $\tilde{A}$ erzeugt . Da

(8) $\tilde{B}\,\tilde{A}^{-1} = \tilde{R}$,

sind $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von $\tilde{\Omega}$. Hiermit lauten die Relationen (7) jetzt

(9) $\tilde{B}^2 = \tilde{E}$, $(\tilde{R}^3\tilde{A}^2)^2 = (\tilde{R}^2\tilde{A}^2)^6 = \tilde{E}$.

Aus (1) und (2) ist ersichtlich , daß die beiden unimodularen Matrizen $\tilde{U}$ und $-\tilde{U}$ dieselbe Substitution

$$Z^* = Z[\tilde{U}] + S = Z[-\tilde{U}] + S$$

liefern und es bei der Bestimmung der Multiplikatoren und der Untersuchung der Poincaréschen Reihen keine Rolle spielt , welche der beiden Matrizen man wählt . Deshalb definieren wir mit Hilfe von $\tilde{\Omega}$ die Gruppe Ω , indem wir setzen

$$(10)\quad U = \left\{ \pm \tilde{U} \right\} \qquad (\tilde{U} \in \tilde{\Omega}) ,$$

also

$$(11)\quad \Omega = \tilde{\Omega} / \left\{ \pm \tilde{E} \right\} .$$

Damit ist nach obigem klar , daß mit

$$(12)\quad B = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} , \; A_2 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} , \; C = \left\{ \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und weiter

$$(13)\quad R = B\,A_2 C = \left\{ \pm \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(14)\quad A = C\,A_2 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gilt , daß A und R oder auch A und B die Gruppe Ω er = zeugen . Aus (9) folgen weiter die definierenden Relationen der Gruppe Ω :

$$(15)\quad B^2 = (R^2A^2)^3 = (R^3A^2)^2 = E .$$

Mit Hilfe der Relationen (15) oder durch direkte Rech = nung weist man leicht die Richtigkeit der folgenden Glei = chungen nach :

$$(16)\quad B^2 = C^2 = E \; ; \; B' = B \; , \; C' = C$$

(17) $A' = B\,A\,B$

(18) $A^{-1} = C\,A\,C$

(19) $A' = C\,A_1$ mit $A_1 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(20) $B = A\,A_1 A^{-1}$

(21) $B\,C = C\,B = A\,A'^{-1}A = A'A^{-1}A'$.

Umgekehrt erhält man aus diesen Gleichungen auch die Relationen (15) . Weiter sei noch angemerkt , daß

(22) $A^n = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad (n \in Z)$

gilt .

Die Symbole $I(U,S;Z)$ bezeichneten Einheiten und lassen sich , da $\mathfrak{Z}$ einfach zusammenhängend ist , in der Gestalt

(23) $I(U,S;Z) = e^{2\pi i\, J(U,S;Z)}$

schreiben . Diese Funktionen $J(U,S;Z)$ nennen wir das zur Funktion $F(Z)$ gehörende Exponentensystem .

Nicht jede Menge von Exponenten kann ein Exponenten = system sein . Nach [1] müssen die Formeln

(24) $J(U_1U_2, S_1[U_2] + S_2 \; ; \; Z) \equiv$

$$J(U_2, S_2; Z[U_1] + S_1) + J(U_1, S_1; Z)$$

zwischen den Exponenten für je zwei Elemente aus Δ gelten , wobei das Kongruenzzeichen bedeutet , daß sich beide Seiten um eine ganzrationale additive Konstante unterscheiden können .

Weiter heißen zwei Formen $F_1(Z)$ und $F_2(Z)$ äquivalent ,

wenn die Gleichung

(25) $F_2(Z) = K(Z)\, F_1(Z)$

mit einer Einheit $K(Z)$ erfüllt ist . Für die zugehörigen Multiplikatorensysteme $I_1(U,S;Z)$ und $I_2(U,S;Z)$ gilt dann

(26) $I_2(U,S;Z) = K(Z[U] + S)\, K^{-1}(Z)\, I_1(U,S;Z)$,

und für die Exponentensysteme

(27) $J_2(U,S;Z) \equiv L(Z[U] + S) - L(Z) + J_1(U,S;Z)$,

wobei

(28) $K(Z) = e^{2\pi i\, L(Z)}$

gesetzt wird .

Falls (26) bzw. (27) gilt , nennen wir die Multiplikatoren = systeme bzw. Exponentensysteme äquivalent .

Nach [2] ist bekannt , daß jedes Exponentensystem , welches zur Gruppe Δ der ganzen Modulsubstitutionen zweiten Grades gehört , ersetzt werden kann durch ein äquivalentes Exponentensystem der Art

(29) $J_1(U,S;Z) = Q(U;Z) + Sp(M(U)Z) + j(U)$.

Hierbei sind die $Q(U;Z)$ Fourierreihen

(30) $Q(U;Z) = \sum_{T \in \mathfrak{T}} a(U,T)\, e^{2\pi i\, Sp(TZ)} \qquad (U \in \Omega)$,

und $\mathfrak{T}$ bezeichnet die Menge der symmetrischen 2 x 2 - Matrizen , welche halbganz sind und für die eine reelle Zeile

$x = (x_1 , x_2)$

existiert mit

(31) $x\, T\, x' < 0$.

Bei der Berechnung von Multiplikatorensystemen besteht das Problem jetzt darin , die Koeffizienten $a(U,T)$ für alle $U \in \Omega$, $T \in \mathfrak{T}$ so zu bestimmen , daß die Reihen (30) in der verallgemeinerten oberen Halbebene $\mathfrak{Z}$ absolut konvergieren und zwischen den Koeffizienten wegen der zu erfüllenden Gleichung (24) die Relation

(32) $a(U_1U_2,T) = a(U_2,T\left[U_1^{-1}\right]) + a(U_1,T)$

$(U_1,U_2 \in \Omega \; ; \; T \in \mathfrak{T})$

stets erfüllt ist .

II. MULTIPLIKATORENSYSTEME

Es wurde schon bemerkt , daß die Elemente A und B die Gruppe Ω erzeugen . Wegen (16) läßt sich jedes $U \in \Omega$ darstellen in der Form

(33) $U = A^{v_0} BA^{v_1} B \dots BA^{v_{\tau-1}} BA^{v_\tau}$

mit

$$v_\varkappa \in Z \; (\varkappa = 0,\dots,\tau) \;, \tau \in N \cup \{0\} \;.$$

Mit Hilfe von (32) kann man daher für alle $U \in \Omega$ und $T \in \mathfrak{T}$ die Koeffizienten $a(U,T)$ berechnen , wenn die Koeffizienten der beiden Reihen $Q(A;Z)$ und $Q(B;Z)$ bekannt sind . Weiterhin folgt wegen (32) aus der Konvergenz dieser beiden Reihen sofort die Konvergenz aller $Q(U;Z)$ $(U \in \Omega)$.

In dieser Arbeit sollen weiterhin nur Multiplikatoren = systeme betrachtet werden , für die

(34) $a(A,T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{T})$

gilt . Ferner soll im folgenden immer

(35) $a(C,T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{T})$

gelten , da dieses die Rechnung vereinfacht , ohne neue Probleme aufzuwerfen .

Mit $U_1 = U_2 = E$ folgt aus (32) sofort

(36) $a(E,T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{T})$,

und hieraus mit (34)

(37) $a(A^n,T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{T})$.

Die Ω definierenden Relationen (15) liefern notwendige Bedingungen für jedes Multiplikatorensystem, welches dem in (34) und (35) gemachten Ansatz genügt. Mit (16), (32) und (36) liefert die erste Relation aus (15)

(38) $a(B,T) = -a(B,T[B])$ $\qquad (T \in \mathfrak{T})$.

Mit Hilfe der Gleichungen (16) bis (21) und (32) liefern die zweite Relation aus (15):

$$0 = a((R^2A^2)^3,T)$$
$$= a(B,T) + a(B,T[AB]) + a(B,T[BAC]) + a(B,T[C])$$
$$+ a(B,T[ACA']) + a(B,T[ACB])$$

und die dritte Relation aus (15):

$$0 = a((R^3A^2)^2,T) =$$
$$= a(B,T) + a(B,T[AB]) + a(B,T[ABAB]) + a(B,T[A^2C])$$
$$+ a(B,T[ACB]) + a(B,T[BA]).$$

Aus (16), (21), (32), (35) folgt

(39) $a(B,T[C]) = a(B,T)$ $\qquad (T \in \mathfrak{T})$.

Da mit (19) und (20) ferner gilt

$$ACA' = AA_1 = BA,$$

ergibt die zweite Relation aus (15) nach obigem

$$0 = 2a(B,T) + 2a(B,T[AB]) + 2a(B,T[BA])$$

oder mit (38)

(40) $a(B,T) + a(B,T[BA]) = a(B,T[A])$ $\qquad (T \in \mathfrak{T})$.

Analog verfährt man mit der Gleichung, die die dritte Relation aus (15) lieferte und erhält

(41) $a(B,T) + a(B,T[A^2]) + a(B,T[BA])$
$= 2a(B,T[A]) + a(B,T[ABA])$ $\qquad (T \in \mathfrak{T})$.

Man ersetze in (40) T durch T[A] und addiere die so erhaltene Gleichung zu (40) , dann erhält man wieder (41) . Diese Gleichung ist also eine Folgerung aus (40) . Bei dieser Rechnung wurde (35) benutzt . Da mit (17) , (19) und (20) folgt

$$C = BABA^{-1}BA ,$$

erhält man statt (35)

$$0 = a(B,T) - a(B,T[A^{-1}]) - a(B,T[A^{-1}BA])$$

oder

$$a(B,T) = a(B,T[A^{-1}]) + a(B,T[A^{-1}BA]) \qquad (T \in \mathfrak{T}) .$$

Diese Gleichung ist wieder mit (40) äquivalent . Jetzt seien $T \in \mathfrak{T}$ und ein beliebiges $U \in \Omega$ in der Form (33) gewählt . Mit (32) , (34) folgt dann durch einfache Induktion über τ

$$(42)\quad a(U,T) = \sum_{\mu=0}^{\tau-1} a(B,T[A^{\prime -\nu_0} B \dots BA^{\prime -\nu_\mu}]) . \qquad (T \in \mathfrak{T})$$

Ist jetzt

$$U_1 = A^{\nu_0} B \dots BA^{\nu_\tau}$$

$$U_2 = A^{\mu_0} B \dots BA^{\mu_\sigma} ,$$

so fogt

$$U_1 \cdot U_2 = A^{\nu_0} B \dots BA^{\nu_\tau} A^{\mu_0} B \dots BA^{\mu_\sigma}$$

und mit $T \in \mathfrak{T}$ und (42)

$$a(U_1,T) = \sum_{s=0}^{\tau-1} a(B,T[A^{\prime -\nu_0} B \dots BA^{\prime -\nu_s}])$$

$$a(U_2,T[U_1^{\prime -1}]) = \sum_{\tau=0}^{\sigma-1} a(B,T[A^{\prime -\nu_0} B \dots BA^{\prime -\nu_\tau} A^{-\mu_0} B \dots BA^{-\mu_\tau}])$$

Die Addition dieser beiden Summen liefert genau

$a(U_1U_2,T)$.

Damit ist bewiesen :

Satz 1 :

Wenn die Koeffizienten a(B,T) so gewählt werden , daß Q(B;Z) , wie in (30) angegeben , in der ver = allgemeinerten oberen Halbebene $\mathfrak{H}$ konvergiert , sind die Gleichungen (38) und (40) notwendig und hinreichend dafür , daß ein durch Q(B;Z) und (34) , (35) und (42) gegebenes System von Koeffizienten ein Multiplikatorensystem zur Gruppe Δ liefert .

III. EINIGE BEISPIELE

a) Mit Hilfe von Satz 1 kann man jetzt Multiplikatoren = systeme explizit berechnen . Wegen (38) ist der einfachste denkbare Fall durch den Ansatz

$$(43)\quad a_o(B,T) = \begin{cases} c_o & T = T_o \\ -c_o & T = T_o[B] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (c_o \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

gegeben . Wegen (39) , (43) folgt sofort , daß mit

$$T_o = \begin{pmatrix} r_o & s_o \\ s_o & t_o \end{pmatrix}$$

$$T_o[C] = T_o$$

gelten muß , also

$$s_o = 0 .$$

Jetzt muß die Gleichung (40) erfüllt werden . Setzt man in (40) $T = T_o$, so erhält man wegen (43) Bedingungen an T_o . Man sieht leicht , daß T_o nur die Gestalt

$$\begin{pmatrix} r_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_o \end{pmatrix} \qquad (r_o, t_o < 0)$$

haben kann . Indem man eventuell noch c_o durch $-c_o$ ersetzt , erhält man

$$(44)\quad T_o = \begin{pmatrix} r_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (r_o < 0) .$$

Umgekehrt gilt jetzt auch

Hilfssatz 1 :

Durch (34), (35), (42), (43), (44) wird ein Multiplikatorensystem zur Gruppe Δ definiert .

Beweis: Nach Konstruktion sind (38) und (40) erfüllt . Wegen

(45) $Q(B;Z) = c_o(e^{2\pi i\ Sp(T_o Z)} - e^{2\pi i\ Sp(T_o[B]Z)})$

folgt mit Satz 1 die Behauptung .

Es sollen jetzt die zugehörigen Poincaréschen Reihen untersucht werden . Sei allgemein

$$\Omega_1(I) = \left\{U \in \Omega \ : \ I(U;Z) \equiv 1\right\}$$
$$= \left\{U \in \Omega \ : \ Q(U;Z) \equiv 0\right\}$$

und

$$\Omega(T) = \left\{U \in \Omega \ : \ T[U] = T\right\}$$

die Einheitengruppe einer symmetrischen Matrix T . Ist in (33) $\tau = 0$, so ist $U = A^n \in \Omega_1(I_o)$ $(n \in N)$ wegen (34) . Ist $\tau > 0$ in (33) ,so setze man

$$U_n = A^{v_o} B \ldots BA^{v_n} \qquad (0 \leq n \leq \tau) .$$

Dann ist

$$a_o(B, T_o[U'_\mu]\,[A'^{-v_o} B \ldots BA'^{-v_\mu}]) = 1 \qquad (0 \leq \mu < \tau) .$$

Damit $U \in \Omega_1(I_o)$ ist , muß ein $\mu_o \in \left\{0,1,\ldots,\tau-1\right\}$ existieren mit

$$T_o[B] = T_o[U'_\mu U'^{-1}_{\mu_o}] \Leftrightarrow \quad T_o = T_o[U'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} B] .$$

Man ersetze noch T_o durch $T_o[B]$ und erhält insgesamt :

$U \in \Omega_1(I_o)$ genau dann , wenn

entweder $U = A^n$ $(n \in Z)$

oder für jedes $\mu \in [0,\dots,\tau-1]$ existiert genau ein $\mu_o \in [0,\dots,\tau-1]$, so daß $U'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} B$, $BU'_\mu U'^{-1}_{\mu_o}$ aus $\Omega(T_o)$ sind .

Sei $0 \leq \mu < \tau-1$ und $\mu_o = \mu+1$. Dann folgt

$$U'_\mu U'^{-1}_{\mu+1} B = BA'^{-\nu_{\mu+1}} B = A^{-\nu_{\mu+1}} \in \Omega(T_o) .$$

Sei $0 < \mu \leq \tau-1$ und $\mu_o = \mu-1$. Dann folgt

$$BU'_\mu U'^{-1}_{\mu-1} = BA'^{\nu_\mu} B = A^{\nu_\mu} \in \Omega(T_o) .$$

Hiermit erhält man , falls $\tau > 0$ in (33) , wegen

$$T_o[A'^{\nu_{\tau-1}} B \dots BA'^{\nu_0}] = T_o[U'_{\tau-1}] = T_o[BA'^{-\nu_\tau} U'] = T_o[B][U']$$

$$(46)\quad a_o(U,T) = \begin{cases} c_o & T = T_o[B][U'] \quad , \; T \neq T_o[B] \\ -c_o & T = T_o[B] \quad , \; T \neq T_o[B][U'] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und daher das folgende Multiplikatorensystem

$$I_o(E;Z) = I_o(C;Z) = I_o(A^n;Z) \equiv 1 \qquad (n \in Z)$$

$$(47)\quad I_o(B;Z) = \frac{e^{2\pi i c_o}\, e^{2\pi i \, Sp(T_o Z)}}{e^{2\pi i c_o}\, e^{2\pi i \, Sp(T_o[B]Z)}}$$

$$I_o(U;Z) = \frac{e^{2\pi i c_o}\, e^{2\pi i \cdot Sp(T_o[B][U']Z)}}{e^{2\pi i c_o}\, e^{2\pi i \, Sp(T_o[B]Z)}} \quad \text{(für } \tau > 0 \text{ in (33))}$$

Weiter gilt :

Hilfsatz 2 :

Für das Multiplikatorensystem (47) ist

(48) $\Omega_1(I_o) = \langle A , C \rangle$.

Beweis :

Sei $U \in \Omega$ in der Form (33) geschrieben , T_o wie in (44) .

Wegen der vorangegangenen Bemerkungen ist $U \in \Omega_1(I_o)$

genau dann , wenn

$$U = A^n \qquad (n \in Z)$$

oder , falls $\tau > 0$ in (33) ,

$$U'_{\tau-1}U'^{-1}_o B \ , \ BU'_o U'^{-1}_{\tau-1}$$

aus $\Omega(T_o)$ sind . Da

$$U'_{\tau-1}U'^{-1}_o B = BA'^{-v_\tau} U'A'^{-v_o} B$$

$$BU'_o U'^{-1}_{\tau-1} = BA'^{v_o} U'^{-1}A'^{v_\tau} B$$

und $\Omega(T_o)$ eine Gruppe ist , ist dieses gleichbe = deutend mit

$$U = A^n \qquad (n \in Z)$$

oder

$$BA'^{-v_\tau} U'A'^{-v_o} B \in \Omega(T_o) .$$

Sei

$$V = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

aus $\Omega(T_o)$. Wegen

$$\begin{pmatrix} r_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T_o = T_o[V] = \begin{pmatrix} a^2 r_o & abr_o \\ abr_o & b^2 r_o \end{pmatrix}$$

folgt sofort , daß

$$\Omega(T_o) = < A , C >$$

gilt . Sei jetzt $U \in \Omega_1(I_o)$.

Ist $\tau = 0$, also $U = A^n$ $(n \in Z)$, so ist $U \in < A , C >$.

Ist $\tau > 0$, so ist

$$BA'^{-v_\tau} U' A'^{-v_o} B \in < A , C >,$$

daher existiert ein $n \in Z$ mit

$$U' = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & v_\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & v_o + n \pm v_\tau \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

also

$$U = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_o + n \pm v_\tau & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \in < A , C > .$$

Ist umgekehrt $U \in <A , C >$, so folgt aus (47) , daß

U aus $\Omega_1(I_o)$ ist .

Jetzt kann man die zugehörigen Poincaréschen Reihen

$$(49) \quad F(n, I_o; Z) = \sum_{\Omega / \Omega_1(I_o)} I_o^{-n}(N; Z)$$

untersuchen ; N läuft über ein volles Restsystem von

Ω mod $\Omega_1(I_o)$. Wegen (47) folgt

$$(50) \quad F(n, I_o; Z) = e^{2\pi n c_o i} e^{2\pi i \, Sp(T_o[B]Z)} \sum_{\Omega / \Omega_1(I_o)} e^{-2\pi n c_o i} e^{2\pi i Sp(T_o[B][N']Z)} ,$$

so daß nur

$$(51)\quad G(n,I_o;Z) = \sum_{\Omega/\Omega_1(I_o)} e^{-2\pi n c_o i}\, e^{2\pi i\, Sp(T_o[B][N']Z)}$$

zu untersuchen ist ; wegen (48) läuft N über ein volles System unimodularer Matrizen mit paarweise verschiedenen zweiten Matrizenspalten . Man setze

$$c_o = a_o + ib_o$$

und bilde in (51) den Absolutbetrag . Man erhält

$$\left|e^{-2\pi n c_o i}\, e^{2\pi i\, Sp(T_o[B][N']Z)}\right|$$

$$= \exp\Big[2\pi n\, e^{-2\pi\, Sp(T_o[B][N']Y)}\big(b_o\cos(2\pi Sp(T_o[B][N']X)) + a_o\sin(2\pi Sp(T_o[B][N']X))\big)\Big]$$

Jetzt können zwei Fälle auftreten :

1.Fall : $b_o > 0$

Dann setze man $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1,x_2,x_3 \in Z$. Es folgt

$$\left|e^{-2\pi n c_o i}\, e^{2\pi i\, Sp(T_o[B][N']Z)}\right| = \exp\Big[2\pi n b_o\, e^{-2\pi Sp(T_o[B][N']Y)}\Big] > 1 ,$$

so daß die Reihen (50) nicht absolut konvergieren .

2. Fall : $b_o < 0$

In diesem Fall setze man

$$(52)\quad N_\nu = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix} \right\} \qquad (\nu \in N) .$$

Nach obigem repräsentieren dann für $\nu \neq \mu$ die Matrizen

N_υ und N_μ verschiedene Restklassen von Ω mod $\Omega_1(I_o)$.

Ferner gilt

$$T_o[B][N_\upsilon'] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \upsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \upsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_o & \upsilon r_o \\ \upsilon r_o & \upsilon^2 r_o \end{pmatrix} .$$

Man wähle ein $Y > 0$ und $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit

$$x = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \quad \text{falls } r_o \equiv 0 \bmod 2^\lambda \ , \ r_o \not\equiv 0 \bmod 2^{\lambda+1} .$$

Dann folgt

$$\cos(2\pi \ \mathrm{Sp}(T_o[B][N_\upsilon']X)) = \cos(2\pi r_o x) = -1$$

$$\sin(2\pi \ \mathrm{Sp}(T_o[B][N_\upsilon']X)) = \sin(2\pi r_o x) = 0$$

für alle $\upsilon \in N$, also

$$\left| e^{-2\pi n c_o i} \ e^{2\pi i \ \mathrm{Sp}(T_o[B][N_\upsilon']Z(x))} \right| =$$

$$= \exp\left[-2\pi n b_o \ e^{-2\pi \ \mathrm{Sp}(T_o[B][N_\upsilon']Y)} \right] \geq 1$$

für alle $n \in N$, wobei $Z(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + iY$ wie oben gewählt werde . Hieraus folgt wieder , daß die Reihen (50) nicht absolut konvergieren .

Man kann also zum Multiplikatorensystem (47) mit Hilfe der Poincaréschen Reihen keine automorphe Form mit dem Transformationsverhalten (2) finden .

b) Jetzt kann man versuchen , statt des Ansatzes (43) ein Koeffizientensystem $a_1(U;T)$ zu finden , so daß genau für vier $T \in \mathfrak{T}$ $a_1(B,T) \neq 0$ ist .

Als erstes bietet sich natürlich an

$$(53)\quad T_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (r_1, r_2 < 0\ ;\ r_1 \neq r_2)$$

und

$$(54)\quad a_1(B,T) = \begin{cases} c_1 & T = T_1, T_2 \\ -c_1 & T = T_1[B]\ ,\ T = T_2[B] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (c_1 \in C \setminus \{0\})$$

zu wählen . Statt (46) erhält man dann für $\tau > 0$ in (33)

$$(55)\quad a_1(U,T) = \begin{cases} c_1 & T = T_\upsilon[B][U'] \quad T \neq T_\upsilon[B] \\ -c_1 & T = T_\upsilon[B] \quad T \neq T_\upsilon[B][U'] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\upsilon = 1,2)$$

und statt (47)

$$I_1(E;Z) = I_1(C;Z) = I_1(A^n;Z) \equiv 1 \qquad (n \in Z)$$

$$(56)\quad I_1(B;Z) = \frac{\exp\left[2\pi i c_1 (e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_1 Z)} + e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_2 Z)})\right]}{\exp\left[2\pi i c_1 (e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_1[B]Z)} + e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_2[B]Z)})\right]}$$

$$I_1(U;Z) = \frac{\exp\left[2\pi i c_1 (e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_1[BU']Z)} + e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_2[BU']Z)})\right]}{\exp\left[2\pi i c_1 (e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_1[B]Z)} + e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_2[B]Z)})\right]}$$

(für $\tau > 0$ in (33))

Es ist natürlich wieder

$$\Omega_1(I_1) = \langle A\ ,\ C \rangle$$

und es ist die Reihe

$$(57)\quad G(n,I_1;Z) = \sum_{\Omega/\Omega_1(I_1)} \exp\left[-2\pi n c_1 i (e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_1[BN']Z)} + e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(T_2[BN']Z)})\right]$$

zu untersuchen . Der Absolutbetrag des zu summierenden Faktors in (57) ist mit

$$c_1 = a_1 + ib_1$$

gleich

$$\exp\Big[2\pi n\, e^{-2\pi\, Sp(T_1[BN']Y)}(a_1\sin(2\pi Sp(T_1[BN']X)) + b_1\cos(2\pi Sp(T_1[BN']X))\Big) + 2\pi n\, e^{-2\pi\, Sp(T_2[BN']Y)}(a_1\sin(2\pi Sp(T_2[BN']X)) + b_1\cos(2\pi Sp(T_2[BN']X))\Big)\Big] \tag{58}$$

Jetzt können wieder zwei Fälle eintreten :

<u>1.Fall</u> : $b_1 > 0$

Man schließe wie unter a. , daß die Reihen (57) nicht absolut konvergieren .

<u>2. Fall</u> : $b_1 < 0$

Ohne Einschränkung sei $r_1 < r_2$. Jetzt wähle man $\lambda \geq 0$ so , daß

$$r_1 \equiv 0 \bmod 2^{\lambda} \quad , \quad r_1 \not\equiv 0 \bmod 2^{\lambda+1}$$

und setze

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } x = \frac{1}{2^{\lambda+1}}$$

$Y > 0$

N_v wie in (52) .

Statt (58) erhält man dann

$$\exp\Big[2\pi n(-b_1\, e^{-2\pi\, Sp(T_1[BN_v']Y)} + e^{-2\pi\, Sp(T_2[BN_v']Y)}(a_1\sin(2\pi r_2 x) + b_1\cos(2\pi r_2 x))\Big)\Big]$$

oder

$$\exp\Big[-2\pi n b_1(e^{-2\pi\, Sp((T_1-T_2)[BN_v']Y)} - \frac{a_1\sin(2\pi r_2 x) + b_1\cos(2\pi r_2 x)}{b_1}\Big) e^{-2\pi Sp(T_2[BN_v']Y)}\Big] ,$$

was größer oder gleich 1 für alle hinreichend großen $\nu \in \mathbb{N}$ ist nach Konstruktion . Also ist (57) auch in diesem Fall nicht absolut konvergent in $\mathfrak{Z}$.

c.) Macht man jetzt allgemein den Ansatz

$$(59)\quad a_2(B,T) = \begin{cases} c_2 & T = T_3, T_4 \\ -c_2 & T = T_3[B] \ , T = T_4[B] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \ ,$$

so erhält man wegen (38) , (39) , (40) Bedingungen an T_3 und T_4 . Außer der in (53) , (54) angegebenen Lösung erhält man nur noch eine einzige weitere Möglich = keit (nach eventueller Vertauschung von c_2 und $-c_2$ bzw. T_3 und T_4) , nämlich

$$(60)\quad T_3 = \begin{pmatrix} -2s & s \\ s & 2s \end{pmatrix} \qquad T_4 = \begin{pmatrix} -2s & -s \\ -s & 2s \end{pmatrix} \qquad (s \neq 0) \ .$$

Umgekehrt gilt auch

Hilfssatz 3 :

Durch (34) , (35) , (42) , (59) , (60) wird ein Multiplikatorensystem zur Gruppe Δ definiert .

Beweis : Nach Konstruktion sind (38) , (40) erfüllt . Wegen (59) ist klar , daß

$$Q(B,Z) = \sum_{T \in \mathfrak{T}} a_2(B,T)\ e^{2\pi i\ \mathrm{Sp}(TZ)}$$

konvergent ist in $\mathfrak{Z}$. Mit Satz 1 folgt die Behauptung .

Jetzt kann man versuchen , die Poincaréschen Reihen

$$F(n,I_2;Z) = \sum_{\Omega/\Omega_1(I_2)} I_2^{-n}(N;Z)$$

abzuschätzen . Dazu muß man zuerst $\Omega_1(I_2)$ bestimmen , denn ohne die Kenntnis von $\Omega_1(I_2)$ weiß man erstens nicht , über welche $N \in \Omega$ man zu summieren hat und kennt zweitens die Multiplikatoren $I_2(N;Z)$ nicht . Bei der Bestimmung von $\Omega_1(I_2)$ treten jedoch große Schwierigkeiten auf .

Ist in (33) $\tau = 0$, so ist $U \in \Omega_1(I_2)$. Ist $\tau > 0$, so setze man

$$U_n = A^{v_o} B \dots BA^{v_n} \qquad (0 < n < \tau) .$$

Dann ist

$$a(B, T_v[U'_\mu][A'^{-v_o} B \dots BA'^{-v_\mu}]) = c_2 \qquad (v=3,4 \; ; \mu = 0,1,\dots,\tau-1)$$

Damit $U \in \Omega_1(I_2)$ ist , muß wegen (42) ein $\mu_o \in \{0,\dots,\tau-1\}$ existieren , so daß

$$T_v[U'_\mu][U'^{-1}_{\mu_o}] \in \left\{T_3[B], T_4[B]\right\} \qquad (v = 3,4 \; ; \; 0 \leq \mu \leq \tau-1)$$

ist . Man ersetze noch T_v durch $T_v[B]$ $(v=3,4)$. Da $T_3[C] = T_4$ ist , folgt insgesamt : $U \in \Omega_1(I_2)$ genau dann, wenn

1. $U = A^n$

oder

2. für jedes $\mu \in \{0,\dots,\tau-1\}$ genau ein $\mu_o \in \{0,\dots,\tau-1\}$ existiert , so daß

(61)
$$U'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} B \quad \text{und} \quad BU'_\mu U'^{-1}_{\mu_o}$$
oder
$$U'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} BC \quad \text{und} \quad BU'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} C$$
oder
$$U'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} B \quad \text{und} \quad BU'_\mu U'^{-1}_{\mu_o} C$$

oder $U_\mu' U_{\mu_o}'^{-1} BC$ und $BU_\mu' U_{\mu_o}'^{-1}$ aus $\Omega(T_v)$ sind ($v = 3,4$) .

Jetzt war $T_3[C] = T_4$. Wegen (16) gilt auch $T_4[C] = T_3$.

Sei $U \in \Omega(T_3)$. Es folgt

$$T_4[CUC] = T_3[UC] = T_3[C] = T_4 .$$

Sei $U \in \Omega(T_4)$. Es folgt

$$T_3[CUC] = T_4[UC] = T_4[C] = T_3 .$$

Also gilt

(62) $\Omega(T_4) = \Omega(T_3)[C]$.

Erfüllt jetzt ein $U \in \Omega$ für alle $\mu \in \{0,\dots,\tau-1\}$ jeweils eine der Bedingungen (61) für $v = 3$, so multipliziere man von rechts mit C - diese Bedingung kommt dann ebenfalls in (61) vor - und erhält , daß U (61) auch für $v = 4$ erfüllt .

Es ist also $\Omega(T_3)$ zu bestimmen . Sei $U = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$ aus $\Omega(T_3)$. Dann gilt

$$T_3 = \begin{pmatrix} -2s & s \\ s & 2s \end{pmatrix} = T_3[U] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2s & s \\ s & 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2sa^2+2sac+2sc^2 & -2sab+sad+sbc+2sdc \\ -2sab+sad+sbc+2sdc & -2sb^2+2sbd+2sd^2 \end{pmatrix} .$$

Man muß daher alle $U \in \Omega$ finden , für die

$$a^2 - ac - c^2 = 1$$

$$-2ab + ad + bc + 2cd = 1$$

$$-b^2 + bd + d^2 = 1$$

gilt .

1. Fall : $ad - bc = 1$

Man erhält :

$$U = E \text{ oder } U = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } a^2 - ab - b^2 = 1 \text{ und } a \neq 0 \,,\ b \neq 0 \,,\ a \neq b \,.$$

2. Fall : $ad - bc = -1$

Man erhält :

$$U = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & -(a+c) \\ c & -a \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit } -a^2 + ac + c^2 = -1 \text{ und } a \neq 0 \,.$$

Lösungen hiervon sind im

1. Fall $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n \right\}$ $(n \in Z)$

2. Fall $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n \right\}$ $(n \in Z)$.

Man rechnet leicht nach , daß alle diese Matrizen aus $\Omega(T_3)$ sind .

Aber auch jetzt kann man $\Omega_1(I_2)$ noch nicht angeben , da die Bedingung (61) zu unhandlich ist . Man sieht , daß schon bei sehr einfachen Multiplikatorensystemen die Untersuchung der Poincaréschen Reihen schwierig wird .

IV. POINCARÉSCHE REIHEN

Die im letzten Abschnitt geschilderten Schwierigkeiten werden durch folgenden Ansatz umgangen :

es sei angenommen , man habe ein Koeffizientensystem

$$(63)\qquad a(B,T) = \begin{cases} c_1,\dots,c_m & T = T_1,\dots,T_m \\ -c_1,\dots,-c_m & T = T_1[B] = T_{m+1},\dots,T=T_m[B]=T_{2m} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(T_\mu \neq T_{\mu'} \text{ für } \mu \neq \mu' \quad (\mu,\mu' = 1,\dots,2m))$$

$$a(A,T) = a(C,T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{T}) ,$$

welches die Bedingung (40) erfüllt . Ferner gelte für das zugehörige Multiplikatorensystem I(U;Z)

$$(64)\quad \Omega_1(I) = \langle A , C \rangle .$$

Dann kann man die Poincaréschen Reihen

$$(65)\quad F(n,I;Z) = \sum_{\Omega/\Omega_1(I)} I^{-n}(N;Z)$$

untersuchen .

Sei $N \in \Omega$ in der Form (33) geschrieben , also

$$N = A^{\upsilon_0} B \dots BA^{\upsilon_\tau} .$$

Dann gilt :

$$\left| I^{-n}(N;Z) \right| = \left| e^{-2\pi n i \sum_{T\in\mathfrak{T}} a(N,T)\, e^{2\pi i Sp(TZ)}} \right|$$

$$= \exp\left[2\pi n \sum_{T\in\mathfrak{T}} \operatorname{Im}\left\{ a(N,T)\, e^{2\pi i Sp(TZ)} \right\} \right]$$

$$= \exp\left[2\pi n \sum_{T\in\mathfrak{T}} e^{-2\pi Sp(TY)} \left(\operatorname{Re} a(N,T) \sin(2\pi Sp(TX)) + \operatorname{Im} a(N,T) \cos(2\pi Sp(TX)) \right) \right]$$

$$= \exp\left[2\pi n \sum_{\nu=1}^{2m} \sum_{\chi=0}^{\tau-1} \sum_{\mu=0}^{\tau-1} e^{-2\pi Sp(T_\nu [A^{\upsilon_\chi} B \dots BA^{\upsilon_0}] Y)} .x. \right]$$

mit

$$\cdot x \cdot = \operatorname{Re}\, a(B, T_\nu[A'^{\nu_\varkappa} B \ldots BA'^{\nu_o}]\ [A'^{-\nu_o} B \ldots BA'^{-\nu_\mu}])$$
$$\sin(2\pi\ \operatorname{Sp}(T_\nu[A'^{\nu_\varkappa} B \ldots BA'^{\nu_o}] X))\ +$$
$$+\ \operatorname{Im}\, a(B, T_\nu[A'^{\nu_\varkappa} B \ldots BA'^{\nu_o}]\ [A'^{-\nu_o} B \ldots BA'^{-\nu_\mu}])$$
$$\cos(2\pi\ \operatorname{Sp}(T_\nu[A'^{\nu_\varkappa} B \ldots BA'^{\nu_o}] X))\ .$$

Man setze N_ν wie in (52) , also

$$N_\nu = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = BA'^{\nu} = A^{\nu} B \ . \qquad (\nu \in N)$$

Es folgt :

$$a(N_\nu, T) = a(A^{\nu} B, T) = a(B, T[A'^{-\nu}]) \qquad (\nu \in N)$$

$$a(N_\nu, T_\mu[A'^{\nu}]) = a(B, T_\mu) \neq 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m;\ \nu \in N)$$

und hiermit

$$\left| I^{-n}(N_\nu; Z) \right| =$$

$$= \exp\Big[2\pi n \sum_{\mu=1}^{2m} e^{-2\pi\ \operatorname{Sp}(T_\mu[A'^{\nu}] Y)} (\operatorname{Re}\, a(B, T_\mu) \sin(2\pi \operatorname{Sp}(T_\mu[A'^{\nu}] X)) \tag{66}$$

$$+\ \operatorname{Im}\, a(B, T_\mu)\ \cos(2\pi\ \operatorname{Sp}(T_\mu[A'^{\nu}] X)) \ ) \Big] \ .$$

Weiter sei

$$T_\mu = \begin{pmatrix} r_\mu & s_\mu \\ s_\mu & t_\mu \end{pmatrix} \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m) \ .$$

$$c_\mu = a_\mu + ib_\mu$$

Um die Divergenz der Reihen (65) zu zeigen , braucht man wegen (64) nur ein $Z_o \in \mathfrak{Z}$ finden , so daß $\left| I^{-n}(N_\nu; Z_o) \right|$ für $\nu \to \infty$ nicht gegen Null konvergiert . Zur Vereinfachung werde

$$Y = E > 0$$

gesetzt . Ferner setze man

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wegen

$$T_\mu[A'^\nu] = \begin{pmatrix} r_\mu & \nu r_\mu + s_\mu \\ \nu r_\mu + s_\mu & \nu^2 r_\mu + 2\nu s_\mu + t_\mu \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (\mu = 1,\dots,2m \\ \nu \in N) \end{matrix}$$

folgt mit

$$Z(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + iE$$

$$\left| I^{-n}(N_\nu ; Z(x)) \right| =$$

$$(67) \quad = \exp\left[2\pi n \sum_{\mu=1}^{2m} e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T_\mu[A'^\nu])} (a_\mu \sin(2\pi r_\mu x) + b_\mu \cos(2\pi r_\mu x)) \right] .$$

Jetzt sei $\mu_1 \in \{1,\dots,2m\}$ so gewählt ,daß

$$(68) \quad r_{\mu_1} \leq r_\mu \qquad (\mu = 1,\dots,2m)$$

gilt. Es könnte für

$$\varphi = 1,\dots,\chi'$$

gelten

$$r_{\mu_1} = r_{\mu_\varphi} \qquad (\varphi = 1,\dots,\chi') .$$

Falls $\chi' = 1$, ist μ_1 eindeutig bestimmt, (68) gilt dann sogar mit dem $<$- Zeichen für $\mu \neq \mu_1$. Falls $\chi' > 1$, wähle man $\mu_1' \in \{\mu_1,\dots,\mu_{\chi'}\}$ so, daß

$$(69) \quad s_{\mu_1'} \leq s_{\mu_\varphi} \qquad (\varphi = 1,\dots,\chi')$$

gilt . Jetzt könnte wieder für $\lambda = 1,\dots,\chi$ gelten :

$$r_{\mu_1'} = r_{\mu_{\varphi_\lambda}} \quad , \quad s_{\mu_1'} = s_{\mu_{\varphi_\lambda}} \qquad (\lambda = 1,\dots,\chi) .$$

Falls $\chi = 1$, ist μ_1' eindeutig bestimmt , (69) gilt dann für $\mu_\varphi \neq \mu_1'$ sogar mit dem $<$ Zeichen .

Falls $\chi > 1$, wähle man μ_1'' so,daß

$$t_{\mu_1''} < t_{\mu_{\varphi_\lambda}} \qquad (\lambda = 1,\dots,\chi;\ \mu_{\varphi_\lambda} \neq \mu_1'')$$

gilt . Dann ist μ_1'' eindeutig bestimmt . Der so ein = deutig bestimmte Index μ_1 bzw. μ_1' oder μ_1'' werde im folgenden mit μ_o bezeichnet . Wegen

$$\mathrm{Sp}(T_\mu[A'^\nu]) = r_\mu + \nu^2 r_\mu + 2\nu s_\mu + t_\mu$$

$$\mathrm{Sp}((T_\mu - T_{\mu_o})[A'^\nu]) = (r_\mu - r_{\mu_o}) + \nu^2(r_\mu - r_{\mu_o}) + 2\nu(s_\mu - s_{\mu_o}) + (t_\mu - t_{\mu_o}) \tag{70}$$

und (67) erhält man

$$\begin{aligned}
&\left|I^{-n}(N_\nu;Z(x))\right| = \\
&= \exp\Bigg[2\pi n\, e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}(T_{\mu_o}[A'^\nu])}\Big\{(a_{\mu_o}\sin(2\pi r_{\mu_o}x)+b_{\mu_o}\cos(2\pi r_{\mu_o}x)) \\
&+ \sum_{\substack{\mu=1\\ r_\mu > r_{\mu_o}}}^{2m} e^{-2\pi\,\mathrm{Sp}((T_\mu - T_{\mu_o})[A'^\nu])}(a_\mu\sin(2\pi r_\mu x)+b_\mu\cos(2\pi r_\mu x)) \\
&+ \sum_{\substack{\mu=1\\ r_\mu = r_{\mu_o}\\ s_\mu > s_{\mu_o}}}^{2m} e^{-2\pi[2\nu(s_\mu - s_{\mu_o})+(t_\mu - t_{\mu_o})]}(a_\mu\sin(2\pi r_{\mu_o}x)+b_\mu\cos(2\pi r_{\mu_o}x)) \\
&+ \sum_{\substack{\mu=1\\ r_\mu = r_{\mu_o}\\ s_\mu = s_{\mu_o}\\ t_\mu > t_{\mu_o}}}^{2m} e^{-2\pi(t_\mu - t_{\mu_o})}(a_\mu\sin(2\pi r_{\mu_o}x)+b_\mu\cos(2\pi r_{\mu_o}x))\Big\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{71}$$

Nach Konstruktion von μ_o und wegen (70) streben für $\nu \to \infty$ die Werte der ersten beiden Summen gegen Null; die dritte Summe ist von ν unabhängig . Also ist der Wert der geschweiften Klammer für alle $\nu \in N$ beschränkt . Jetzt sind mehrere Fälle zu untersuchen .

1. Fall : $r_{\mu_o} > 0$

Dann folgt wegen (70)

$$-2\pi \operatorname{Sp}(T_{\mu_o}[A'^{\nu}]) \to -\infty \quad (\nu \to \infty) ,$$

also

$$e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T_{\mu_o}[A'^{\nu}])} \to 0 \quad (\nu \to \infty) .$$

Wegen obiger Bemerkung erhält man

$$\left| I^{-n}(N_\nu ; Z(x)) \right| \to 1 \qquad (\nu \to \infty ; n \in N) ,$$

also die Divergenz der Reihen (65) .

2. Fall : $r_{\mu_o} < 0$

Dann gilt

$$-2\pi \operatorname{Sp}(T_{\mu_o}[A'^{\nu}]) \to \infty \quad (\nu \to \infty) ,$$

also auch

$$e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T_{\mu_o}[A'^{\nu}])} \to \infty \quad (\nu \to \infty) .$$

Um die Divergenz der Reihen (65) zu zeigen , muß man ein $x \in R$ finden , so daß der von $\nu \in N$ unabhängige Term

$$a_{\mu_o} \sin(2\pi r_{\mu_o} x) + b_{\mu_o} \cos(2\pi r_{\mu_o} x) +$$

$$+ \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu = r_{\mu_o} \\ s_\mu = s_{\mu_o} \\ t_\mu > t_{\mu_o}}}^{2m} e^{-2\pi(t_\mu - t_{\mu_o})} (a_\mu \sin(2\pi r_{\mu_o} x) + b_\mu \cos(2\pi r_{\mu_o} x)) =$$

$$(72) \quad = a_{\mu_o} \sin(2\pi r_{\mu_o} x) + b_{\mu_o} \cos(2\pi r_{\mu_o} x) +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\chi} e^{-2\pi(t_{\mu_{\varphi_\lambda}} - t_{\mu_o})} (a_{\mu_{\varphi_\lambda}} \sin(2\pi r_{\mu_o} x) + b_{\mu_{\varphi_\lambda}} \cos(2\pi r_{\mu_o} x))$$

größer als Null ist .

Man integriere diesen Term . Die Stammfunktion

$$\frac{1}{2\pi r_{\mu_o}} \left[\text{const.} + (-a_{\mu_o} \cos(2\pi r_{\mu_o} x) + b_{\mu_o} \sin(2\pi r_{\mu_o} x)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{\chi} e^{-2\pi(t_{\mu_{\varphi_\lambda}} - t_{\mu_o})} (-a_{\mu_{\varphi_\lambda}} \cos(2\pi r_{\mu_o} x) + b_{\mu_{\varphi_\lambda}} \sin(2\pi r_{\mu_o} x)) \right]$$

ist eine nicht - konstante periodische Funktion .

Ihre Ableitung , also (72) , muß daher für gewisse $x \in R$ positiv sein . Also erhält man für gewisse $x \in R$, daß

$$\left| I^{-n}(N_\nu ; Z(x)) \right| \to \infty \qquad (\nu \to \infty) ,$$

so daß die Reihen (65) wieder divergent sind .

3.Fall : $r_{\mu_o} = 0$

Es gilt dann :

$$\left| I^{-n}(N_\nu ; Z(x)) \right| =$$

$$= \exp\left[2\pi n \, e^{-2\pi(2\nu s_{\mu_o} + t_{\mu_o})} \right\} b_{\mu_o} +$$

$$(73) \quad + \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu > 0}}^{2m} e^{-2\pi \, Sp((T_\mu - T_{\mu_o})[A^{\nu}])} (a_\mu \sin(2\pi r_\mu x) + b_\mu \cos(2\pi r_\mu x))$$

$$+ \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu = 0 \\ s_\mu > s_{\mu_o}}}^{2m} b_\mu e^{-2\pi[2\nu(s_\mu - s_{\mu_o}) + (t_\mu - t_{\mu_o})]} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu = 0 \\ s_\mu = s_{\mu_o} \\ t_\mu > t_{\mu_o}}}^{2m} b_\mu e^{-2\pi(t_\mu - t_{\mu_o})} \left\{ \right]$$

Da nach Voraussetzung $r_{\mu_o} = 0$ ist , muß $s_{\mu_o} \neq 0$ sein , da sonst $T_{\mu_o} \geq 0$ wäre . Wegen (39) folgt leicht , daß $s_{\mu_o} < 0$ ist . Da die b_μ ($\mu=1,\dots,2m$) beliebig waren , kann bei dieser Konstruktion $\left|I^{-n}(N_\nu ; Z(x))\right|$ für $\nu \to \infty$ gegen Null konvergieren .

Man wähle daher μ_o wie in den anderen Fällen , setze aber jetzt

$$Z(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + iE \ .$$

Aus (66) folgt dann

$$\begin{aligned} &\left|I^{-n}(N_\nu ; Z(x))\right| = \\ &= \exp\Big[2\pi n\, e^{-2\pi(2\nu s_{\mu_o} + t_{\mu_o})}\Big\{(a_{\mu_o}\sin(4\pi s_{\mu_o} x) + b_{\mu_o}\cos(4\pi s_{\mu_o} x)) \\ &+ \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu > 0}}^{2m} e^{-2\pi Sp((T_\mu - T_{\mu_o})[A'^{\nu}])}(a_\mu \sin(4\pi(\nu r_\mu + s_\mu)x) + \\ &\qquad + b_\mu \cos(4\pi(\nu r_\mu + s_\mu)x)) \\ &+ \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu = 0 \\ s_\mu > s_{\mu_o}}}^{2m} e^{-2\pi[2\nu(s_\mu - s_{\mu_o}) + (t_\mu - t_{\mu_o})]}(a_\mu \sin(4\pi s_\mu x) + b_\mu \cos(4\pi s_\mu x)) \\ &+ \sum_{\substack{\mu=1 \\ r_\mu = 0 \\ s_\mu = s_{\mu_o} \\ t_\mu > t_{\mu_o}}}^{2m} e^{-2\pi(t_\mu - t_{\mu_o})}(a_\mu \sin(4\pi s_{\mu_o} x) + b_\mu \cos(4\pi s_{\mu_o} x))\Big\}\Big] \end{aligned} \tag{74}$$

Die Werte der ersten beiden Summen gehen für $\nu \to \infty$ wieder gegen Null . Mit denselben Argumenten wie im zweiten Fall

erhält man für gewisse $x \in R$, daß

$$\left| I^{-n}(N_\nu ; Z(x)) \right| \to \infty \qquad (\nu \to \infty) ,$$

und damit , daß die Reihen (65) auch in diesem Fall divergieren .

Zusammenfassend ist damit bewiesen

Satz 2 :

Zu einem Multiplikatorensystem

$$(75)\quad I(U;Z) = e^{2\pi i\, Q(U;Z)}$$

mit

$$Q(U;Z) = \sum_{T \in \mathfrak{T}} a(U,T)\, e^{2\pi i\, Sp(TZ)}$$

bilde man die Poincaréschen Reihen

$$(76)\quad F(n,I;Z) = \sum_{\Omega / \Omega_1(I)} I^{-n}(N;Z) \quad .$$

Gilt dann

$$(77)\quad a(B,T) = \begin{cases} c_1, \ldots, c_m & T = T_1, \ldots, T_m \\ -c_1, \ldots, -c_m & T = T_1[B], \ldots, T_m[B] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a(A,T) = a(C,T) = 0 \qquad (T \in \mathfrak{T})$$

und

$$(78)\quad \Omega_1(I) = \langle A\ ,\ C \rangle \quad \text{bzw.} \quad \left[\Omega_1(I) : \langle A\ ,\ C \rangle \right] < \infty ,$$

so sind die Reihen (76) divergent .

Literaturverzeichnis :

[1] Christian , U.
Über die Multiplikatorensysteme zur Gruppe der ganzen Modulsubstitutionen n-ten Grades
Math. Ann. 138 , 363 - 397 (1959)

[2] Christian , U.
On the factors of automorphy for the group of integral modular substitutions of second degree
Ann. of Math. 73 , 134 - 153 (1961)

[3] Coxeter , H.S.M. ; Moser , W.O.J.
Generators and relations for discrete groups
Ergebn. der Mathematik und ihrer Grenzgebiete
Springer - Verlag , Berlin - Göttingen - Heidelberg (1957)

[4] Christian , U.
Siegelsche Modulfunktionen
Vorlesungsausarbeitung , Göttingen (1974/75)

[5] Hua , L.K. ; Reiner , I.
On the generators of the symplectic modular group
Trans. Amer. Math. Soc. 65 , 415 - 426 (1949)

[6] Klingen , H.
Über Poincarésche Reihen zur Siegelschen Modulgruppe
Math. Ann. 168 , 157 - 170 (1967)

[7] Siegel , C.L.
Einführung in die Theorie der Modulfunktionen
n -ten Grades
Math. Ann. 116 , 617 - 657 (1939)

[8] Siegel , C.L.
Einheiten quadratischer Formen
Abhandl. Math. Seminar der Hansischen Univ. 13 ,
209 - 239 (1940)

[9] Siegel , C.L.
Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Funktionen =
theorie I , II , III
Vorlesungsausarbeitung Göttingen 1964/65/66

[10] v.d. Waerden , B.L.
Algebra I , II
Springer Verlag , Berlin - Göttingen - Heidelberg

Lebenslauf

von

Horst Kuschnerow

Am 3. August 1948 wurde ich als ältester Sohn des kauf = männischen Angestellten Edmund Kuschnerow und seiner Ehefrau Eva Kuschnerow , geb. Grovermann , in Soltau / Hann., Kreis Soltau , geboren . Nach meiner Einschulung am 1.4.1955 besuchte ich die dortige Grundschule . Im Dezember 1957 zogen wir um nach Twistringen , Kreis Grafschaft Hoya , und ich besuchte vom 1.1.1958 die dortige evangelische Grundschule . Nach vier Schuljahren bestand ich die Aufnahmeprüfung am Gymnasium in Diepholz , wo ich dann meine Ausbildung fortsetzte und am 10.6.1968 meine Reifeprüfung ablegte . Nach dem Grundwehrdienst studierte ich ab Oktober 1969 in Göttingen Mathematik mit dem Nebenfach Physik . Am 25.10.1971 legte ich dort die Vordiplom - und am 10.2.1975 die Hauptdiplomprüfung ab . Während der Anfertigung dieser Arbeit war ich am Mathe = matischen Institut der Georg - August - Universität Göttingen beschäftigt .